تطبيقات التكامل المحدود

ملاحظة:

إذا كان الطلب المطلوب الحصول على مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين

$y_1 = f(x)$ ، $y_2 = g(x)$

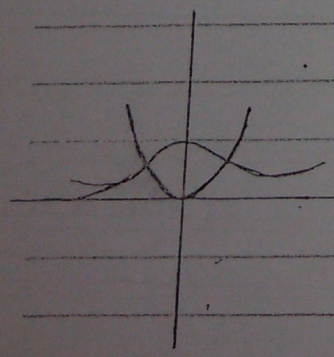
فإن المساحة أو الطلب يعطى بالعلاقة:

$$S = \int_a^b (y_2 - y_1)\, dx$$

مثال: احسب مساحة الطلب المغلق:

$y = \frac{x^2}{2}$ ، $y = \frac{1}{1+x^2}$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{1+x^2}$$



$$x^2 + x^4 - 2 = 0$$

$$z^2 + z - 2 = 0$$

$$(z+2)(z-1) = 0$$

$z = -2 \leftarrow x^2 = -2$ (مرفوض)

$z = 1 \leftarrow x^2 = 1 \leftarrow x = 1$ أو $x = -1$

$$\int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left[\arctan x - \frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{+1}$$

$$= \arctan(-1) - \frac{1}{6} - \arctan(-1) - \frac{1}{6} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}$$

حساب المساحة في الإحداثيات الوسيطية:

إذا كان المنحني معيناً بمعادلتين

$$y = f(t) \quad , \quad x = g(t)$$

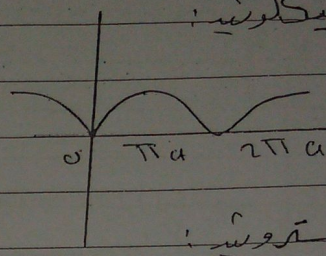
• نحسب المساحة المحدودة بالمحور:

$$S = \int_a^b y \, dx$$

حيث نعوض عن x و dx بمشتقها بدلالة المتحول t وتغير الحدين الجديدين a, b

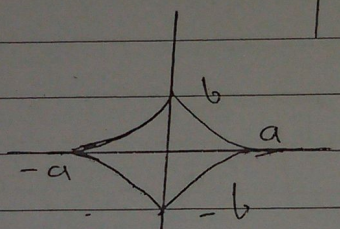
• السيكلوئيد:

$$y = 2a(1 - \cos t)$$
$$x = 2a(t - \sin t)$$



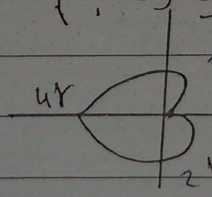
• الاستروئيد:

$$y = b \sin^3 t$$
$$x = a \cos^3 t$$



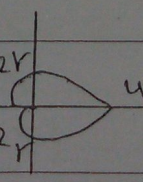
• الكارديوئيد (منحني القلب):

$$\rho_r = 2r(1 - \cos\theta)$$



$0 < \theta < 2\pi$

$$\rho = 2r(1 + \cos\theta)$$



ملاحظة:

معادلات الوسيطية للدائرة

$$x = a\cos\theta$$
$$y = a\sin\theta$$

حساب المساحة في الإحداثيات القطبية:

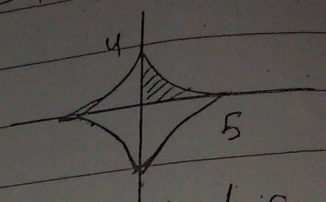
نعطى المساحة الإحداثيات القطبية بالعلاقة:

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} \rho^2 \, d\theta$$

RB HAMAK

مثال: حساب مساحة السكل الاستوائي المحصور بالمنحنى الوسيطي:

$$y = 4\sin^3 t$$
$$x = 5\cos^3 t$$



$$\int_a^b y\,dx$$

$$dx = -15\sin t\cos^2 t\,dt$$

$x = 0$ عندما $t = \frac{\pi}{2}$

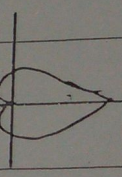
$x = 5$ عندما $t = 0$

$$\frac{S}{4} = -60\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4 t\cos^2 t\,dt$$

$$\frac{S}{4} = 60\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cos^2 x\,dt$$

تمرين: أوجد مساحة المحدودة بالكاردوني (منحنى قطبي).

$$\rho = \alpha(1+\cos\theta)$$



$$S = \frac{\alpha^2}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$S = \frac{\alpha^2}{2}\int_0^{2\pi} \left(1+2\cos\theta+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta\right)d\theta$$

$$S = \frac{\alpha^2}{2}\left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$S = \frac{\alpha^2}{2}(3\pi) \Rightarrow S = \frac{3}{2}\alpha^2\pi$$

مثال: احسب مساحة السيكلوني

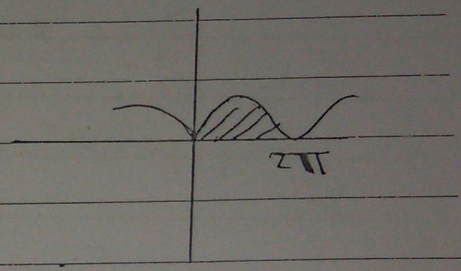
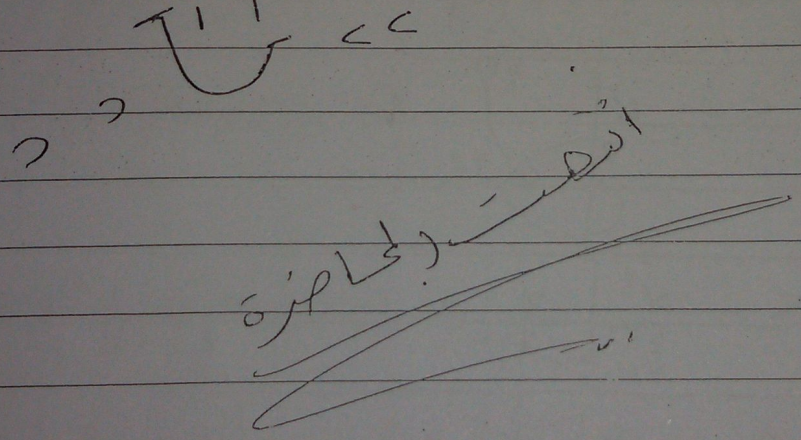
$x = 2(t-\sin t)$ ، $y = 2(1-\cos t)$ مع المحور ox

حيث $t \in [0, 2\pi]$

$$S = \int_a^b y \cdot dx \longrightarrow dx = 2(1-\cos t)$$

$$S = 4\int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt$$

$$S = 4\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt$$

$$= 4\left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin t\right]_0^{2\pi}$$

$$= 4(3\pi) = 12\pi$$